MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie A

1

N1 V obore reálnych čísel riešte rovnicu $\lfloor 3x+5 \rfloor = 10$.

N2 V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc $x + \lfloor 2y \rfloor = 8$, $\lfloor 3x \rfloor - y = 3$.

D1 V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc $3x + \lfloor y \rfloor = 10$, $\lfloor 4x \rfloor + x + y = 17$.

D2 V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc $\lfloor x+y \rfloor = x - y$, $\lfloor 5y + x \rfloor = 5y - x$.

2

N1 Dokážte, že konvexný štvoruholník $ABCD$ je tetivový (t. j. jeho vrcholy ležia na jednej kružnici) práve vtedy, keď platí $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$.

N2 Dokážte, že konvexný štvoruholník $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď súčet veľkostí uhlov ABC a ADC je $180°$.

N3 Dokážte tvrdenie o „Švrčkovom bode“: V ľubovoľnom trojuholníku ABC prechádza os vnútorného uhla BAC stredom toho oblúka BC kružnice opísanej trojuholníku ABC, na ktorom neleží vrchol A.

D1 Dokážte tvrdenie o „troch prstoch“: V danom trojuholníku ABC označme I stred kružnice vpísanej a S stred toho oblúka BC kružnice opísanej trojuholníku ABC, na ktorom neleží vrchol A. Potom platí $|SB| = |SI| = |SC|$.

D2 Dokážte, že os vonkajšieho uhla pri vrchole A ľubovoľného trojuholníka ABC prechádza stredom toho oblúka BC kružnice opísanej trojuholníku ABC, na ktorom leží vrchol A.

D3 Je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Vnútri strany AB leží bod D a na polpriamke opačnej k CA leží bod E tak, že $|BD| = |CE|$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ABC a ADE majú okrem bodu A ešte ďalší spoločný bod na osi uhla BAC.

3

N1 Uvažujme situáciu súťažnej úlohy pre prípad $n = 3$. *Vodorovným* nazveme každý ťah, pri ktorom je žetón posunutý v riadku. Udajte príklad postupnosti ťahov, ktorou splníme cieľ úlohy a ktorá pritom obsahuje najmenší možný počet vodorovných ťahov.

N2 Pre každé kladné prirodzené číslo n dokážte rovnosť $1 + 2 + 4 + 5 + \cdots + (3n-2) + (3n-1) = 3n^2$.

N3 Zdôvodnite, že v priebehu ťahov vedúcich k cieľu súťažnej úlohy sa z každých dvoch žetónov musí aspoň jeden niekedy dostať do horného riadku hracieho plánu.

D1 Uvažujme rovnaké počiatočné rozostavenie $2n$ žetónov ako v súťažnej úlohe. Najmenej koľkými ťahmi možno získať rozostavenie, keď opäť všetky žetóny budú v dolnom riadku, avšak žetón 1 sa ocitne v poslednom stĺpci?

D2 V jednom rade stojí n žetónov postupne s číslami od 1 do n. V každom ťahu môžeme navzájom vymeniť dva susedné žetóny. Koľkým najmenej ťahmi možno pôvodné poradie žetónov zmeniť na opačné, t. j. s číslami od n do 1?

D3 V situácii zo súťažnej úlohy je tentoraz v dolnom riadku rozmiestnených $2n$ žetónov s číslami 1, 2,…, $2n$ *v ľubovoľnom poradí*. Najmenej koľkými najmenej ťahmi možno vždy dosiahnuť to, aby všetkých $2n$ žetónov bolo v dolnom riadku rozmiestnených *vzostupne*, t. j. v poradí ako na začiatku pôvodnej úlohy?

---

4 Reálne číslo, ktoré rozdeľuje konečnú postupnosť reálnych čísel usporiadaných podľa veľkosti na dve rovnako početné časti, sa nazýva jej *medián*. V prípad, že prvkov je nepárny počet, existuje práve jeden medián – je to číslo v strede tejto postupnosti.

Číslo q zo zadania súťažnej úlohy je teda práve jej mediánom.

N1 Martin napísal na tabuľu hodnotu rozdielu $i/j - j/i$ pre každú dvojicu kladných prirodzených čísel $i \le 5$, $j \le 5$. Určte medián všetkých čísel na tabuli.

N2 Riešte súťažnú úlohu pre prípad $k = n$.

N3 Riešte súťažnú úlohu pre prípad $n = 3$.

N4 Dokážte, že pre ľubovoľnú štvoricu reálnych čísel a, b, c, d, pričom $b > 0$ a $d > 0$, platí

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

D1 Napíšme na tabuľu súčet $a+b+c+d+e$ pre každú pätícu (a, b, c, d, e) kladných prirodzených čísel menších ako 6. Určte medián všetkých 5^5 čísel na tabuli.

D2 Nech k, n sú nepárne prirodzené čísla. Pre každé dve kladné prirodzené čísla i a j, kde $i \leq k$, $j \leq n$, napíšme na tabuľu zlomok $\frac{i-j}{i+j}$. Určite medián všetkých týchto zlomkov. Využite na to výsledok súťažnej úlohy.

D3 Uvažujme množinu $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160\}$ a všetky jej trojprvkové podmnožiny. Rozhodnite, či je viac tých, ktoré majú súčin svojich prvkov väčší ako 2006, alebo tých, ktoré majú súčin svojich prvkov menší ako 2006.

D4 Martin pre každú neprázdnu podmnožinu M množiny $\{0, 1, \ldots, 16\}$ napísal na tabuľu zvyšok súčtu všetkých prvkov z M po delení číslom 17. Určte, ktorý zvyšok má na tabuli najväčší počet výskytov.

D5 *Zlomkovou časťou* $\{x\}$ reálneho čísla x nazývame číslo $x - \lfloor x \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ označuje *celú časť* čísla x (pozri súťažnú úlohu 1). Uvažujme jednak medián čísel $\{\sqrt{1}\}, \{\sqrt{2}\}, \ldots, \{\sqrt{999\,999}\}$, jednak medián čísel $\{\sqrt[3]{1}\}, \{\sqrt[3]{2}\}, \ldots, \{\sqrt[3]{999\,999}\}$. Ktorý z týchto mediánov je väčší?

5

N1 Nech X je vnútorný bod trojuholníka ABC. Dokážte, že X leží na jeho ťažnici z vrcholu A práve vtedy, keď trojuholníky ABX a ACX majú rovnaký obsah.

V úlohách N2, N3, N4 budeme skúmať situáciu zo súťažnej úlohy. Nech teda v ostrouhlom rôznostrannom trojuholníku ABC je M stred strany AB, K a L priesečníky osi uhla pri vrchole A postupne s osami strán AB a AC, ktorých priesečník je označený O. Napokon H je priesečník výšok trojuholníka KLO.

N2 Ukážte, že vzdialenosť bodu H od priamky AC sa rovná $|KM|$.

N3 Nech priamka HK pretína stranu AB v bode E a priamka HL stranu AC v bode F. Dokážte, že priamka AH delí úsečku EF na dva zhodné úseky.

N4 Pri označení z úlohy N3 dokážte, že trojuholníky EMK a FNL sú podobné.

D1 Použitím výsledku úlohy N1 dokážte známe tvrdenie, že ťažnice ľubovoľného trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.

D2 V trojuholníku ABC označme D priesečník osi uhla BAC so stranou BC. Ukážte, že $|BD| : |DC| = |AB| : |AC|$.

D3 Os uhla BCA trojuholníka ABC pretne jemu opísanú kružnicu v bode R rôznom od bodu C, os strany BC pretne v bode P a os strany AC v bode Q. Stred strany BC označíme K a stred strany AC označíme L. Dokážte, že trojuholníky RPK a RQL majú rovnaký obsah.

---

6 V úlohách N1–N4 a D1 je $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ postupnosť zo zadania súťažnej úlohy.

N1 Dokážte, že ak $m \neq n$, tak a_m a a_n sú nesúdeliteľné čísla.

N2 Pre každé kladné n vyjadrite a_{n+1} iba pomocou a_n.

N3 Nech p je prvočíslo, $p \geq 3$ a $p \mid a_n - 1$ pre nejaké n. Ukážte, že ak $m \geq n$, tak $p \nmid a_m$.

N4 Nech p je prvočíslo, $p \geq 3$ a $p \mid a_n - 1$ pre nejaké n. Ukážte, že ak $m < n$, tak $p \nmid a_m$.

D1 Dokážte, že ak $m > n \geq 1$, tak čísla $a_m^2 + a_m + 1$ a $a_n^2 + a_n + 1$ sú nesúdeliteľná.

D2 Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel, z ktorých každé je deliteľom $2^{2^n} + 1$ pre nejaké prirodzené číslo n.

D3 Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel, z ktorých každé je deliteľom $2^{2n+1} - 1$ pre nejaké prirodzené číslo n.

D4 Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel, ktoré nie sú deliteľmi $2^{2^n} + 1$ pre žiadne prirodzené číslo n.

D5 Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel, ktoré nie sú deliteľmi $2^{2n+1} - 1$ pre žiadne prirodzené číslo n.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie A

1

N1 V obore reálnych čísel riešte rovnicu $\lfloor 3x+5\rfloor = 10$.

Riešenie:

Reálne číslo x spĺňa danú rovnicu práve vtedy, keď $10 \le 3x+5 < 11$. Všetky riešenia tejto sústavy dvoch nerovníc tvoria interval $\left[\frac{5}{3}, 2\right)$.

N2 V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc $x + \lfloor 2y\rfloor = 8$, $\lfloor 3x\rfloor - y = 3$.

Riešenie:

Podľa prvej rovnice je číslo x celé, podľa druhej je aj číslo y celé. Tým pádom $\lfloor 2y\rfloor = 2y$ a $\lfloor 3x\rfloor = 3x$, takže máme sústavu $x+2y=8$, $3x-y=3$. Tá má jediné riešenie $(2,3)$, čo je aj riešenie pôvodnej sústavy, lebo obe čísla x, y vyšli celé.

D1 V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc $3x + \lfloor y\rfloor = 10$, $\lfloor 4x\rfloor + x + y = 17$.

Riešenie:

Podľa prvej rovnice je číslo $3x$ celé, podľa druhej je aj číslo $x+y$ celé. Tým pádom nastane jeden z troch prípadov:

- Číslo x je celé. Potom aj čísla y a $4x$ sú celé. Dostávame sústavu $3x+y=10$, $5x+y=17$, ktorá však nemá riešenie v obore celých čísel.
- Číslo x má tvar $x' + \frac{1}{3}$, kde x' je celé číslo. Potom $y = y' + \frac{2}{3}$ pre nejaké celé číslo y' a $\lfloor 4x\rfloor = 4x'+1$. Dostaneme tak sústavu $3x'+y'=9$, $5x'+y'=15$ s jediným riešením $(3,0)$, ktorému zodpovedá riešenie $\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$ pôvodnej sústavy.
- Číslo x má tvar $x' + \frac{2}{3}$, kde x' je celé číslo. Potom $y = y' + \frac{1}{3}$ pre nejaké celé číslo y' a $\lfloor 4x\rfloor = 4x'+2$. Tentoraz nám vyjde sústava $3x'+y'=8$, $5x'+y'=14$ s jediným riešením $(3,-1)$, ktorému zodpovedá riešenie $\left(\frac{11}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ pôvodnej sústavy.

D2 V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc $\lfloor x+y\rfloor = x-y$, $\lfloor 5y+x\rfloor = 5y-x$.

Riešenie:

Keďže obe čísla $x-y$ a $5y-x$ sú celé, ich súčet rovný $4y$ je tiež celé číslo. Preto zo zadaných rovníc vyplýva $5y-x = \lfloor 5y+x\rfloor = \lfloor 4y+(y+x)\rfloor = 4y + \lfloor y+x\rfloor = 4y+(x-y) = 3y+x$, t. j. $5y-x=3y+x$, odkiaľ $y=x$. Pôvodnú sústavu potom možno zapísať ako dvojicu rovníc $\lfloor 2x\rfloor = 0$ a $\lfloor 6x\rfloor = 4x$. Tejto sústave vyhovujú práve tie reálne x, pre ktoré súčasne platí $0 \le 2x < 1$, $4x \le 6x < 4x+1$ a pritom číslo $4x$ je celé. Pretože všetky nerovnice z poslednej vety sú splnené len pre čísla z intervalu $\left[0, \frac{1}{2}\right)$, vyhovujú práve hodnoty 0 a $\frac{1}{4}$.

2

N1 Dokážte, že konvexný štvoruholník $ABCD$ je tetivový (t. j. jeho vrcholy ležia na jednej kružnici) práve vtedy, keď platí $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$.

Riešenie:

- Nech vrcholy A, B, C, D ležia na kružnici so stredom S. Podľa vety o obvodovom a stredovom uhle potom platí $|\sphericalangle ABD| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ASD| = |\sphericalangle ACD|$.
- Nech naopak platí $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$. Označme S, T stredy kružníc opísaných postupne trojuholníkom ABD, ACD. Oba tieto stredy ležia na osi úsečky AD a v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou AD. Podľa vety o obvodovom a stredovom uhle navyše platí $|\sphericalangle ASD| = 2|\sphericalangle ABD| = 2|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ATD|$. Dokopy už dostávame, že $S = T$, takže kružnice opísané trojuholníkom ABD, ACD splývajú.

N2 Dokážte, že konvexný štvoruholník $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď súčet veľkostí uhlov ABC a ADC je $180°$.

Riešenie:

- Nech vrcholy A, B, C, D ležia na kružnici so stredom S. Konvexný a nekonvexný uhol ASC sa dopĺňajú do uhla 360°. Súčet veľkostí týchto dvoch stredových uhlov je rovný dvojnásobku súčtu veľkostí obvodových uhlov ABC a ADC, ktorý sám je teda rovný 180°.
- Nech naopak platí $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ADC| = 180°$. V prípade, keď oba uhly ABC, ADC sú pravé, vyplýva potrebný záver z Tálesovej vety. V opačnom prípade môžeme predpokladať, že napríklad uhol ABC je ostrý a uhol ADC je tupý. Potom vo vnútri polroviny ACB leží ako stred S kružnice opísanej trojuholníku ABC, tak aj stred T kružnice opísanej trojuholníku ADC, pritom oba konvexné uhly ASC a ATC majú postupne veľkosti $2\,|\sphericalangle ABC|$ a $360° - 2\,|\sphericalangle ADC|$, ktoré sú vďaka predpokladu rovnaké. Navyše oba body S, T ležia na osi úsečky AC, takže spolu dostávame $S = T$, a teda kružnice opísané trojuholníkom ABC, ADC splývajú.

N3 Dokážte tvrdenie o „Švrčkovom bode": V ľubovoľnom trojuholníku ABC prechádza os vnútorného uhla BAC stredom toho oblúka BC kružnice opísanej trojuholníku ABC, na ktorom neleží vrchol A.

Riešenie:

Označme S priesečník osi uhla BAC s kružnicou opísanou trojuholníku ABC rôzny od A. V tetivovom štvoruholníku $ABSC$ platí $|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle BCS|$. To znamená, že BSC je rovnoramenný trojuholník so základňou BC, teda S je stred príslušného oblúka BC. Inak je možné využiť všeobecnejšie tvrdenie: Dva obvodové uhly v tej istej kružnici sú zhodné práve vtedy, keď sú zhodné oblúky, ktorým tieto obvodové uhly zodpovedajú.

D1 Dokážte tvrdenie o „troch prstoch": V danom trojuholníku ABC označme I stred kružnice vpísanej a S stred toho oblúka BC kružnice opísanej trojuholníku ABC, na ktorom neleží vrchol A. Potom platí $|SB| = |SI| = |SC|$.

Riešenie:

Stačí zrejme dokázať len jednu rovnosť $|SB| = |SI|$. Pri štandardnom označení veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka ABC platí

$$|\sphericalangle SBI| = |\sphericalangle SBC| + |\sphericalangle CBI| = |\sphericalangle SAC| + \beta/2 = \alpha/2 + \beta/2.$$

Keďže SIB je vonkajší uhol trojuholníka ABI, platí tiež

$$|\sphericalangle SIB| = |\sphericalangle IAB| + |\sphericalangle ABI| = \alpha/2 + \beta/2.$$

Trojuholník SIB tak skutočne má rovnaké ramená SB a SI.

D2 Dokážte, že os vonkajšieho uhla pri vrchole A ľubovoľného trojuholníka ABC prechádza stredom toho oblúka BC kružnice opísanej trojuholníku ABC, na ktorom leží vrchol A.

Riešenie:

Označme N priesečník osi vonkajšieho uhla pri vrchole A s kružnicou opísanou rôzny od A. (V prípade $|AB| = |AC|$, keď sa táto os kružnice opísanej iba dotýka, je tvrdenie úlohy zrejmé.) Uvažujme tiež bod S z úlohy N3. Keďže S leží na osi vnútorného uhla, N na osi vonkajšieho uhla a tieto dve osi sú navzájom kolmé, platí $|\sphericalangle SAN| = 90°$. Podľa Tálesovej vety je potom SN priemerom kružnice opísanej trojuholníku ABC. Keďže S je pritom stred jej oblúka BC neobsahujúceho bod A, N je stred druhého oblúka BC.

D3 Je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Vnútri strany AB leží bod D a na polpriamke opačnej k CA leží bod E tak, že $|BD| = |CE|$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ABC a ADE majú okrem bodu A ešte ďalší spoločný bod na osi uhla BAC.

Riešenie 1:

Na polpriamky opačné k CA a BA dokreslíme postupne body B' a C' určené rovnosťami $|B'C| = |AB|$ a $|C'B| = |AC|$. Podľa výsledku súťažnej úlohy stred kružnice opísanej trojuholníku $AB'C'$ leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC. Tento výsledok môžeme uplatniť na trojuholník $AB'C'$ ešte raz, keď za východiskový vezmeme trojuholník ADE a prihliadneme na rovnosti $|B'E| = |B'C| - |CE| = |AB| - |BD| = |AD|$ a $|C'D| = |C'B| + |BD| = |AC| + |CE| = |AE|$. Stred kružnice opísanej trojuholníku $AB'C'$ leží preto tiež na kružnici opísanej trojuholníku ADE. Našli sme tak priesečník kružníc opísaných trojuholníku ABC a trojuholníku $\triangle ADE$, ktorý je rôzny od bodu A a ktorý leží na osi uhla BAC – ide totiž o stred kružnice opísanej trojuholníku $AB'C'$, ktorý je podľa osi uhla BAC súmerný, lebo obe jeho strany AB', AC' majú dĺžku $|AB| + |AC|$.

Riešenie 2:

Označme S stred kratšieho oblúka BC kružnice opísanej trojuholníku ABC. Z tetivového štvoruholníka $ABSC$ máme $|\sphericalangle DBS| = |\sphericalangle ECS|$, a preto trojuholníky DBS a ECS sú zhodné podľa vety *sus*. Odtiaľ $|\sphericalangle ADS| = 180° - |\sphericalangle SDB| = 180° - |\sphericalangle SEC| = 180° - |\sphericalangle SEA|$, takže podľa úlohy N2 je aj štvoruholník $ADSE$ tetivový.

3

N1 Uvažujme situáciu súťažnej úlohy pre prípad $n = 3$. *Vodorovným* nazveme každý ťah, pri ktorom je žetón posunutý v riadku. Udajte príklad postupnosti ťahov, ktorou splníme cieľ úlohy a ktorá pritom obsahuje najmenší možný počet vodorovných ťahov.

Riešenie:

Tabuľka má šesť stĺpcov, preto so žetónom 1 musíme vykonať aspoň 5 ťahov doprava, so žetónom 2 aspoň 3 doprava, so žetónom 3 aspoň 1 doprava, so žetónom 4 aspoň 1 doľava, so žetónom 5 aspoň 3 doľava a so žetónom 6 aspoň 5 doľava. Celkom tak potrebujeme aspoň 18 vodorovných ťahov. Vyhovujúci príklad s 18 vodorovnými ťahmi: Najprv presunieme žetóny 2 až 6 hore, potom žetón 1 do jeho cieľa, následne žetóny 2 až 5 dole a potom žetón 6 do jeho cieľa. Takto sme vodorovnými ťahmi iba so žetónmi 1, 6 dosiahli to, že sa prehodili. Podobne potom prehodíme žetóny 2, 5 a nakoniec žetóny 3, 4.

N2 Pre každé kladné prirodzené číslo n dokážte rovnosť $1 + 2 + 4 + 5 + \cdots + (3n - 2) + (3n - 1) = 3n^2$.

Riešenie 1:

Použijeme indukciu vzhľadom na číslo n. Ak $n = 1$, rovnosť platí ($1+2 = 3 \cdot 1^2$). Ak platí pre nejaké k, tak pre $k+1$ ju odvodíme takto: $1+2+\cdots+(3k+1)+(3k+2) = 3k^2+(3k+1)+(3k+2) = 3k^2+6k+3 = 3(k+1)^2$.

Riešenie 2:

Sčítame $2n$ rovností $i + (3n - i) = 3n$, kde $i \in \{1, 2, \dots, 3n-2, 3n-1\}$, a výslednú rovnosť vydelíme dvoma.

N3 Zdôvodnite, že v priebehu ťahov vedúcich k cieľu súťažnej úlohy sa z každých dvoch žetónov musí aspoň jeden niekedy dostať do horného riadku hracieho plánu.

Riešenie:

Uvážme žetóny i a j, kde $i < j$. Na začiatku je i naľavo od j, ale na konci je i napravo od j. Takto by sa ich poradie v dolnom riadku nemohlo vymeniť, keby oba žetóny boli v tomto riadku stále.

D1 Uvažujme rovnaké počiatočné rozostavenie $2n$ žetónov ako v súťažnej úlohe. Najmenej koľkými ťahmi možno získať rozostavenie, keď opäť všetky žetóny budú v dolnom riadku, avšak žetón 1 sa ocitne v poslednom stĺpci?

Riešenie:

V prvom ťahu musíme posunúť nejaký žetón hore a niekedy neskôr ho posunúť dole. S žetónom 1 musíme vykonať aspoň $2n - 1$ ťahov doprava. Aby sme vysvetlili, že celkový počet ťahov doľava je tiež aspoň $2n - 1$, označme stĺpce zľava doprava číslami 1 až $2n$ a uvažujme premennú veličinu, ktorá je rovná súčtu $2n$ čísel tých stĺpcov, v ktorých sa jednotlivé z $2n$ žetónov aktuálne nachádzajú. Táto veličina má v počiatočnom aj koncovom rozostavení rovnakú hodnotu (rovnú $1 + 2 + \cdots + 2n$), s každým ťahom doprava vzrastie o 1, s každým ťahom doľava klesne o 1 a pri ťahoch v stĺpcoch sa nemení – preto musia byť celkové počty ťahov doprava a ťahov doľava dokonca rovnaké. Dokázali sme tak, že ťahov všetkými smermi musí byť aspoň $2 + (2n - 1) + (2n - 1)$ čiže $4n$.

Počet $4n$ ťahov stačí: Žetón 1 posunieme nahor, potom všetky ostatné o 1 políčko doľava a nakoniec žetón 1 do posledného stĺpca a nadol.

D2 V jednom rade stojí n žetónov postupne s číslami od 1 do n. V každom ťahu môžeme navzájom vymeniť dva susedné žetóny. Koľkým najmenej ťahmi možno pôvodné poradie žetónov zmeniť na opačné, t. j. s číslami od n do 1?

Riešenie:

Každú dvojicu žetónov musíme niekedy (ako susedné dva žetóny) prehodiť. Keďže všetkých dvojíc je $\frac{n(n-1)}{2}$, potrebujeme aspoň $\frac{n(n-1)}{2}$ ťahov.

Toľko ťahov skutočne stačí – presunieme napríklad najprv žetón 1 na posledné miesto ($n - 1$ ťahov), potom žetón 2 na predposledné miesto ($n - 2$ ťahov) atď., až nakoniec žetón $n - 1$ na druhé miesto (1 ťah). Tak vykonáme práve $(n - 1) + (n - 2) + \cdots + 2 + 1$ čiže $\frac{n(n-1)}{2}$ ťahov.

D3 V situácii zo súťažnej úlohy je tentoraz v dolnom riadku rozmiestnených $2n$ žetónov s číslami 1, 2,..., $2n$ *v ľubovoľnom poradí*. Najmenej koľkými najmenej ťahmi možno vždy dosiahnuť to, aby všetkých $2n$ žetónov bolo v dolnom riadku rozmiestnených *vzostupne*, t. j. v poradí ako na začiatku pôvodnej úlohy?

Riešenie:

Tento počet je rovnaký ako počet ťahov v súťažnej úlohe (ktorý tu prezrádzať nebudeme).

Najprv dokážeme matematickou indukciou nasledujúce tvrdenie: *Nech k je kladné prirodzené číslo. Uvažujme hrací plán $k \times 2$, na ktorom je (iba) v hornom riadku nejaký počet žetónov s určitými navzájom rôznymi číslami vybranými z množiny $\{1, 2, \dots, k\}$. Potom existuje taká postupnosť ťahov, ktorá pre každé i premiestni žetón* *s číslom i (ak na pláne je) na dolné políčko i. stĺpca a ktorá na to pre každý žetón využije najmenší možný počet ťahov.* Ak $k = 1$, tvrdenie zjavne platí. Nech teraz $k \geq 2$ a nech pre každé m, kde $m < k$, tvrdenie platí. Na zadanom pláne $k \times 2$ (ktorý spĺňa predpoklady tvrdenia) vezmime žetón s najväčším číslom, označme ho i, tento žetón posuňme nadol a potom ho presuňme do i. stĺpca. Následne vďaka indukčnému predpokladu presunieme na správne miesta všetky žetóny, ktoré sa nachádzajú v prvých $i - 1$ stĺpcoch. Potom budeme po jednom zľava presúvať ešte žetóny, ktoré v zadanom pláne $k \times 2$ prípadne zostali od i. stĺpca napravo: Každý z nich presunieme najskôr doľava do jemu príslušného stĺpca a potom nadol. Zostavili sme tak pre zadaný plán $2 \times k$ postupnosť ťahov, ktorá má zrejme všetky potrebné vlastnosti. Dôkaz indukciou je tak ukončený.

Prejdime k vlastnej úlohe D3. Pri ľubovoľnej východiskovej situácii s ťahmi začneme tak, že všetky žetóny – okrem toho s číslom $2n$ – posunieme nahor a potom žetón $2n$ presunieme na posledné miesto (ak už tam nestál). Následne na žetóny z prvých $2n - 1$ stĺpcov uplatníme postupnosť ťahov z dokázaného tvrdenia. Nakoniec potom na správne miesto presunieme prípadný žetón z horného políčka posledného stĺpca. Pri takej konštrukcii bude počet ťahov najväčší, ak budú na začiatku žetóny usporiadané zostupne. V tomto prípade optimálnosť konštrukcie vyplýva z riešenia pôvodnej úlohy.

---

4 Reálne číslo, ktoré rozdeľuje konečnú postupnosť reálnych čísel usporiadaných podľa veľkosti na dve rovnako početné časti, sa nazýva jej *medián*. V prípad, že prvkov je nepárny počet, existuje práve jeden medián – je to číslo v strede tejto postupnosti.

Číslo q zo zadania súťažnej úlohy je teda práve jej mediánom.

N1 Martin napísal na tabuľu hodnotu rozdielu $i/j - j/i$ pre každú dvojicu kladných prirodzených čísel $i \leq 5$, $j \leq 5$. Určte medián všetkých čísel na tabuli.

Riešenie:

Označme $f(i,j) = i/j - j/i$, potom na tabuli je 25 čísel. Z nich 5, a to $f(1,1)$, $f(2,2)$, $f(3,3)$, $f(4,4)$ a $f(5,5)$, je rovných 0. Zvyšných 20 čísel rozdelíme do 10 dvojíc: Každé číslo $f(i,j)$, kde $i \neq j$, spárujeme s číslom $f(j,i)$. V každej dvojici je zrejme jedno číslo kladné a jedno číslo záporné. Na tabuli je tak 10 čísel kladných, 10 záporných a 5 núl. Medián je preto 0.

N2 Riešte súťažnú úlohu pre prípad $k = n$.

Riešenie:

Podobne ako v úlohe N1 vyčleníme zvlášť zlomky $\frac{i}{i}$ s hodnotou 1 – tých je k, teda nepárny počet. Ostatné zlomky zase rozdelíme do dvojíc: každý zlomok $\frac{i}{j}$ spárujeme s prevráteným zlomkom $\frac{j}{i}$. V každej dvojici je zrejme jeden zlomok menší ako 1 a jeden zlomok väčší ako 1. Zlomkov menších ako 1 je teda rovnaký počet ako zlomkov väčších ako 1, takže medián je 1.

N3 Riešte súťažnú úlohu pre prípad $n = 3$.

Riešenie:

Na tabuli máme pre každé i z $\{1, 2, \dots, k\}$ napísané tri zlomky $\frac{i}{1}$, $\frac{i}{2}$, $\frac{i}{3}$. Zamerajme sa najprv na zlomky $\frac{i}{2}$. Keďže k je nepárne, vo vzostupnom poradí týchto zlomkov stojí uprostred zlomok $\frac{1}{2}(1/2 + k/2)$ čiže $\frac{k+1}{4}$, ktorý tak je ich mediánom.

Porovnávame s ním teraz ostatných $2k$ zlomkov $\frac{i}{1}$ a $\frac{i}{3}$ s čitateľmi i od 1 do k. Využijeme na to jednak ekvivalencie

$$\frac{i}{1} < \frac{k+1}{4} \Leftrightarrow (k+1) - i > \frac{3(k+1)}{4} \Leftrightarrow \frac{k+1-i}{3} > \frac{k+1}{4},$$

jednak tie isté ekvivalencie s opačnými znakmi ostrých nerovností. Vyplýva z nich, že počet tých zlomkov $\frac{i}{1}$, ktoré sú menšie, resp. väčšie ako $(k+1)/4$, je rovnaký ako počet tých zlomkov $\frac{i}{3}$, ktoré sú väčšie, resp. menšie ako $(k+1)/4$. Odtiaľ už vyplýva, že $(k+1)/4$ je hľadaný medián všetkých $3k$ zlomkov.

N4 Dokážte, že pre ľubovoľnú štvoricu reálnych čísel a, b, c, d, pričom $b > 0$ a $d > 0$, platí

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Riešenie:

Nerovnosti z pravej strany implikácie sú ekvivalentné s nerovnosťami $a(b+d) < (a+c)b$, resp. $(a+c)d < c(b+d)$. Tie sú zrejme obe ekvivalentné s nerovnosťou $ad < bc$, ktorá je dôsledkom nerovnosti z ľavej strany implikácie.

D1 Napíšme na tabuľu súčet $a+b+c+d+e$ pre každú pätícu (a,b,c,d,e) kladných prirodzených čísel menších ako 6. Určte medián všetkých 5^5 čísel na tabuli.

Riešenie:

Päticu $(3,3,3,3,3)$ so súčtom 15 dajme bokom a ostatné pätice rozdeľme do dvojíc tak, že každú päticu (a,b,c,d,e) spárujeme s päticou $(6-a,6-b,6-c,6-d,6-e)$. V každej dvojici buď obe pätice majú súčet 15, alebo jedna pätica má súčet menší ako 15 a druhá pätica má súčet väčší ako 15.

D2 Nech k,n sú nepárne prirodzené čísla. Pre každé dve kladné prirodzené čísla i a j, kde $i \le k$, $j \le n$, napíšme na tabuľu zlomok $\frac{i-j}{i+j}$. Určite medián všetkých týchto zlomkov. Využite na to výsledok súťažnej úlohy.

Riešenie:

Ukážte, že pre kladné čísla a, b, c, d platí $(a-b)/(a+b) < (c-d)/(c+d)$ práve vtedy, keď $a/b < c/d$. Z hľadiska usporiadania hodnôt zlomkov je teda situácia na tabuli rovnaká ako v súťažnej úlohe. Preto ak x/y je medián zo súťažnej úlohy, bude hľadaný medián rovný $(x-y)/(x+y)$.

D3 Uvažujme množinu $\{1,2,4,5,8,10,16,20,32,40,80,160\}$ a všetky jej trojprvkové podmnožiny. Rozhodnite, či je viac tých, ktoré majú súčin svojich prvkov väčší ako 2006, alebo tých, ktoré majú súčin svojich prvkov menší ako 2006.

Riešenie:

MO, 56. ročník, A-S-2, https://skmo.sk/dokument.php?id=223

D4 Martin pre každú neprázdnu podmnožinu M množiny $\{0,1,\dots,16\}$ napísal na tabuľu zvyšok súčtu všetkých prvkov z M po delení číslom 17. Určte, ktorý zvyšok má na tabuli najväčší počet výskytov.

Riešenie:

Ukážeme, že ak by sme na tabuľu nezapísali zvyšok súčtu prvkov celej množiny $\{0,1,\dots,16\}$, tak každý zvyšok od 0 do 16 by mal na tabuli rovnaký počet výskytov. Uvážme všetky k-prvkové podmnožiny $\{0,1,\dots,16\}$ s pevným k od 1 do 16. Rozdeľme tieto podmnožiny do 17-prvkových skupín tak, že v každej skupine budeme mať s každou množinou $\{x_1,\dots,x_k\}$ nasledujúcich 16 množín (sčítanie ďalej chápeme ako operáciu so zvyškami po delení 17): $\{1+x_1,\dots,1+x_k\}$, $\{2+x_1,\dots,2+x_k\}$, ..., $\{16+x_1,\dots,16+x_k\}$. Zvyšky súčtov prvkov jednotlivých 17 množín v každej skupine teda budú zvyšky $\sum x_i$, $k+\sum x_i$, $2k+\sum x_i$,..., $16k+\sum x_i$. V tomto zozname zvyškov bude každý zo 17 možných zvyškov zastúpený práve raz, a to vďaka nesúdeliteľnosti čísel k a 17. Keďže to platí pre každú vytvorenú skupinu, každý zvyšok bude zvyškom súčtov prvkov rovnakého počtu k-prvkových podmnožín, a to pre každé k od 1 do 16. Tým je dôkaz hotový. Keďže nezahrnutá 17-prvková množina $\{0,1,\dots,16\}$ má súčet prvkov 136 so zvyškom 0, je tento zvyšok zapísaný na tabuli v počte o 1 väčšom ako každý iný z ostatných 16 zvyškov.

D5 *Zlomkovou časťou* $\{x\}$ reálneho čísla x nazývame číslo $x - \lfloor x \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ označuje *celú časť* čísla x (pozri súťažnú úlohu 1). Uvažujme jednak medián čísel $\{\sqrt{1}\}$, $\{\sqrt{2}\}$, ..., $\{\sqrt{999\,999}\}$, jednak medián čísel $\{\sqrt[3]{1}\}$, $\{\sqrt[3]{2}\}$, ..., $\{\sqrt[3]{999\,999}\}$. Ktorý z týchto mediánov je väčší?

Riešenie:

Nech n je prirodzené číslo. Všimnime si, že pre celé čísla i od n^2 do n^2+n, ktorých je $n+1$, platí $n \le \sqrt{i} < n+\frac{1}{2}$, takže $\{\sqrt{i}\} < \frac{1}{2}$. Podobne pre celé čísla i od n^2+n+1 do n^2+2n čiže $(n+1)^2-1$, ktorých je n, platí $\{\sqrt{i}\} > \frac{1}{2}$. Porovnaním oboch počtov i zisťujeme, že pre *najtesnejšiu väčšinu* celých čísel i z intervalu $[n^2,(n+1)^2-1]$ je hodnota $\{\sqrt{i}\}$ menšia ako $\frac{1}{2}$. Ak necháme n prebiehať hodnoty od 1 do 999, uvažované intervaly disjunktne pokryjú celé čísla práve v rozpätí od 1 do 999 999. Preto je v prvej zadanej postupnosti väčšina čísel menších ako $\frac{1}{2}$, teda je taký aj ich medián. Podobne sa teraz pre prirodzené n pozrime na hodnoty $\{\sqrt[3]{i}\}$ pre celé čísla i z intervalu $[n^3,(n+1)^3-1]$. Pre uvažované i platí $\{\sqrt[3]{i}\} < \frac{1}{2}$ práve vtedy, keď $i < \left(n+\frac{1}{2}\right)^3 = n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{4}n+\frac{1}{8}$. Počet dotyčných i, ktoré spĺňajú poslednú podmienku, je teda práve $\left\lfloor \frac{3}{2}n^2+\frac{3}{4}n+\frac{1}{8} \right\rfloor + 1$, čo neprevyšuje hodnotu $\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{4}n+\frac{9}{8}$, ktorá je vďaka $n \ge 1$ menšia ako $\frac{1}{2}\left((n+1)^3-n^3\right)$. Nerovnosť $\{\sqrt[3]{i}\} < \frac{1}{2}$ tak spĺňa *menšina* celých čísel i zo skúmaného intervalu. Ak vezmeme teraz n od 1 do 99, tieto intervaly disjunktne pokryjú celé čísla práve v rozpätí od 1 do 999 999. Preto je v druhej zadanej postupnosti väčšina čísel väčších ako $\frac{1}{2}$, teda je taký aj ich medián.

Dokopy dostávame, že druhý medián je väčší ako prvý.

5

N1 Nech X je vnútorný bod trojuholníka ABC. Dokážte, že X leží na jeho ťažnici z vrcholu A práve vtedy, keď trojuholníky ABX a ACX majú rovnaký obsah.

Riešenie 1:

Označme D priesečník polpriamky AX so stranou BC. Trojuholníky ADB a ADC majú spoločnú výšku z vrcholu A, preto $\mathrm{S}(ADB) : \mathrm{S}(ADC) = |DB| : |DC|$. Podobne tiež $\mathrm{S}(XDB) : \mathrm{S}(XDC) = |DB| : |DC|$. Dokopy dostávame

$$\frac{S(ABX)}{S(ACX)} = \frac{S(ADB) - S(XDB)}{S(ADC) - S(XDC)} = \frac{\frac{|DB|}{|DC|} \cdot S(ADC) - \frac{|DB|}{|DC| \cdot S(XDC)}}{S(ADC) - S(XDC)} = \frac{|DB|}{|DC|}.$$

Vidíme, že trojuholníky ABX a ACX majú rovnaký obsah práve vtedy, keď $|DB| = |DC|$, t. j. práve vtedy, keď D je stred BC, čiže keď AD je ťažnica trojuholníka ABC.

Riešenie 2:

Spojme vnútorný bod X s vrcholmi A, B, C a stredom D strany BC. Keďže $S(XBD) = S(XCD)$, rovnosť $S(ABX) = S(ACX)$ nastane práve vtedy, keď $S(ABX) + S(XBD) = S(ACX) + S(XCD)$, teda práve vtedy, keď dvojica úsečiek AX, XD rozpoľuje obsah trojuholníka ABC. To zrejme platí, ak X leží na úsečke AD, a navyše to zrejme neplatí, ak leží X vo vnútri jedného z trojuholníkov ABD, ACD.

V úlohách N2, N3, N4 budeme skúmať situáciu zo súťažnej úlohy. Nech teda v ostrouhlom rôznostrannom trojuholníku ABC je M stred strany AB, K a L priesečníky osi uhla pri vrchole A postupne s osami strán AB a AC, ktorých priesečník je označený O. Napokon H je priesečník výšok trojuholníka KLO.

N2 Ukážte, že vzdialenosť bodu H od priamky AC sa rovná $|KM|$.

Riešenie:

Z $KH \perp LN \perp AC$ máme $KH \parallel AC$. Tým pádom vzdialenosť H od AC je rovnaká ako vzdialenosť K od AC. Keďže K leží na osi uhla BAC, má od AC rovnakú vzdialenosť ako od AB, teda $|KM|$.

N3 Nech priamka HK pretína stranu AB v bode E a priamka HL stranu AC v bode F. Dokážte, že priamka AH delí úsečku EF na dva zhodné úseky.

Riešenie:

Platí $HE \parallel AC$ a $HF \parallel AB$, takže $AEHF$ je rovnobežník. Jeho uhlopriečky EF a AH sa preto navzájom rozpoľujú.

N4 Pri označení z úlohy N3 dokážte, že trojuholníky EMK a FNL sú podobné.

Riešenie:

Vyplýva to z vety *uu*, pretože trojuholníky majú pri vrcholoch M, N pravé uhly a aj ich uhly pri vrcholoch E, F sú zhodné (vďaka rovnobežníku $AEHF$, pozri riešenie N3).

D1 Použitím výsledku úlohy N1 dokážte známe tvrdenie, že ťažnice ľubovoľného trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.

Riešenie:

V trojuholníku ABC označme T priesečník ťažníc z vrcholov B a C. Z úlohy N1 vieme, že $S(ABT) = S(BCT)$ a $S(BCT) = S(ACT)$, odkiaľ $S(ABT) = S(ACT)$, teda opäť podľa úlohy N1 bod T leží na ťažnici z vrcholu A.

D2 V trojuholníku ABC označme D priesečník osi uhla BAC so stranou BC. Ukážte, že $|BD| : |DC| = |AB| : |AC|$.

Riešenie:

Trojuholníky ABD a ACD majú spoločnú výšku z vrcholu A, preto $S(ABD) : S(ACD) = |BD| : |DC|$. Zároveň však majú zhodné výšky z vrcholu D, takže $S(ABD) : S(ACD) = |AB| : |AC|$. Z oboch rovností už vyplýva potrebný záver.

D3 Os uhla BCA trojuholníka ABC pretne jemu opísanú kružnicu v bode R rôznom od bodu C, os strany BC pretne v bode P a os strany AC v bode Q. Stred strany BC označíme K a stred strany AC označíme L. Dokážte, že trojuholníky RPK a RQL majú rovnaký obsah.

Riešenie:

IMO Shortlist 2007, úloha G1, https://www.imo-official.org/problems/IMO2007SL.pdf#page=40

---

6 V úlohách N1–N4 a D1 je $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ postupnosť zo zadania súťažnej úlohy.

N1 Dokážte, že ak $m \neq n$, tak a_m a a_n sú nesúdeliteľné čísla.

Riešenie:

Ak je $m > n$, t. j. $m \geq n + 1$, tak z rovnosti $a_m = a_0 a_1 a_2 \dots a_{m-1} - 1$ vyplýva $a_n \mid a_m + 1$. Pre najväčší spoločný deliteľ D čísel a_m, a_n tak platí $D \mid a_m$ a zároveň $D \mid a_n \mid a_m + 1$, takže aj $D \mid (a_m + 1) - a_m = 1$, t. j. $D = 1$.

N2 Pre každé kladné n vyjadrite a_{n+1} iba pomocou a_n.

Riešenie:

$a_{n+1} = (a_0 a_1 \dots a_{n-1})a_n - 1 = (a_n + 1)a_n - 1 = a_n^2 + a_n - 1.$

N3 Nech p je prvočíslo, $p \geq 3$ a $p \mid a_n - 1$ pre nejaké n. Ukážte, že ak $m \geq n$, tak $p \nmid a_m$.

Riešenie:

Keďže $p \geq 3$ a $a_0 - 1 = 2$, platí $n \neq 0$. Z predpokladu $a_n \equiv 1 \pmod p$ podľa výsledku N2 dostávame $a_{n+1} \equiv a_n^2 + a_n - 1 \equiv 1^2 + 1 - 1 \equiv 1 \pmod p$. Matematickou indukciou analogicky získavame $a_m \equiv 1 \pmod p$ pre každé m také, že $m \geq n$. Z toho vyplýva $p \nmid a_m$.

N4 Nech p je prvočíslo, $p \geq 3$ a $p \mid a_n - 1$ pre nejaké n. Ukážte, že ak $m < n$, tak $p \nmid a_m$.

Riešenie:

Pripusťme, že naopak $p \mid a_m$. Keďže $n > m \geq 0$, platí $a_n = a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1} - 1$, takže $p \mid a_m \mid a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1} = a_n + 1$. Spolu máme $p \mid a_n - 1$ a $p \mid a_n + 1$, a teda $p \mid (a_n + 1) - (a_n - 1) = 2$, čo odporuje predpokladu $p \geq 3$.

D1 Dokážte, že ak $m > n \geq 1$, tak čísla $a_m^2 + a_m + 1$ a $a_n^2 + a_n + 1$ sú nesúdeliteľné.

Riešenie:

Nech p je prvočíslo a $p \mid a_n^2 + a_n + 1$. Keďže $3 = a_0 \mid a_0 a_1 \dots a_{n-1} = a_n + 1$, tak $a_n \equiv 2 \pmod 3$, a preto $a_n^2 + a_n + 1 \equiv 2^2 + 2 + 1 \equiv 1 \pmod 3$, takže $p \neq 3$. Podľa výsledku N2 postupne dostávame $a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1 = (a_n^2 + a_n + 1) - 2 \equiv -2 \pmod p$, $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_{n+1} - 1 \equiv (-2)^2 + (-2) - 1 \equiv 1 \pmod p$, $a_{n+3} \equiv 1^2 + 1 - 1 \equiv 1 \pmod p$. Ďalej analogicky matematickou indukciou získavame $a_k \equiv 1 \pmod p$ pre každé k, kde $k \geq n + 2$. Preto číslo a_m, kde $m > n$, dáva po delení p zvyšok -2 alebo 1, teda číslo $a_m^2 + a_m + 1$ dáva zvyšok 1 alebo 3. Z toho už vyplýva potrebný záver $p \nmid a_m^2 + a_m + 1$, lebo (ako už vieme) $p \neq 3$.

D2 Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel, z ktorých každé je deliteľom $2^{2^n} + 1$ pre nejaké prirodzené číslo n.

Riešenie:

Opakovaným použitím vzorca $2^{2k} - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)$ dostávame $2^{2^n} - 1 = (2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1) \cdots (2^{2^{n-1}} + 1)$. V prípade $0 \leq n < m$ tak platí $2^{2^n} + 1 \mid 2^{2^m} - 1$. Najväčší spoločný deliteľ nepárnych čísel $2^{2^n} + 1$ a $2^{2^m} + 1$ je preto tiež deliteľom čísla $2^{2^m} - 1$, a teda aj čísla $\left(2^{2^m} + 1\right) - \left(2^{2^m} - 1\right)$ čiže 2, takže je to číslo 1. Postupnosť $\left(2^{2^n} + 1\right)_{n=0}^{\infty}$ je teda zložená z navzájom nesúdeliteľných čísel. Ak teda priradíme každému n akýkoľvek prvočiniteľ čísla $2^{2^n} + 1$, dostaneme nekonečnú postupnosť navzájom rôznych prvočísel vyhovujúcich zadaniu úlohy.

D3 Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel, z ktorých každé je deliteľom $2^{2n+1} - 1$ pre nejaké prirodzené číslo n.

Riešenie:

Najprv použitím Euklidovho algoritmu dokážte: *Ak je d najväčší spoločný deliteľ kladných prirodzených čísel a a b, tak najväčším spoločným deliteľom čísel $2^a - 1$ a $2^b - 1$ je číslo $2^d - 1$.* V dôsledku toho platí: Ak sú p a q rôzne prvočísla, tak čísla $2^p - 1$ a $2^q - 1$ sú nesúdeliteľné. Ak preto vyberieme ku každému nepárnemu prvočíslu p nejaký prvočiniteľ čísla $2^p - 1$, dostaneme výber nekonečne veľa prvočísel vyhovujúcich zadaniu úlohy.

D4 Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel, ktoré nie sú deliteľmi $2^{2^n} + 1$ pre žiadne prirodzené číslo n.

Riešenie:

Vyhovujú všetky prvočísla s vlastnosťou zo zadania úlohy D3 (ktorých je nekonečne veľa). Zoberme ľubovoľné z nich, povedzme p, a vyberme k nemu dotyčné n s vlastnosťou $p \mid 2^{2n+1} - 1$. Pripusťme, že pre nejaké prirodzené m platí aj $p \mid 2^{2^m} + 1$. Keďže čísla $2n + 1$ a 2^{m+1} sú nesúdeliteľné, vďaka tvrdeniu uvedenému v riešení D3 sú tiež nesúdeliteľné aj čísla $2^{2n+1} - 1$ a $2^{2^{m+1}} - 1$. Keďže však $2^{2^m} + 1 \mid 2^{2^{m+1}} - 1$, z predpokladu $p \mid 2^{2^m} + 1$ dostávame $p \mid 2^{2^{m+1}} - 1$, zároveň však $p \mid 2^{2n+1} - 1$, teda p je spoločný deliteľ dvoch nesúdeliteľných čísel, a to je spor.

D5 Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel, ktoré nie sú deliteľmi $2^{2n+1} - 1$ pre žiadne prirodzené číslo n.

Riešenie:

Vyhovujú všetky prvočísla s vlastnosťou zo zadania úlohy D2 (ktorých je nekonečne veľa). Dôkaz sporom je rovnaký ako v riešení D4, pretože vychádza z tých istých predpokladov: Pre niektoré prvočíslo p sa nájdu prirodzené čísla m, n také, že $p \mid 2^{2^m} + 1$ a $p \mid 2^{2n+1} - 1$.