

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Zadania úloh domáceho kola kategórie A (maďarská verzia)

1 A valós számok halmazában oldd meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}2x + [y] &= 2022, \\3y + [2x] &= 2023.\end{aligned}$$

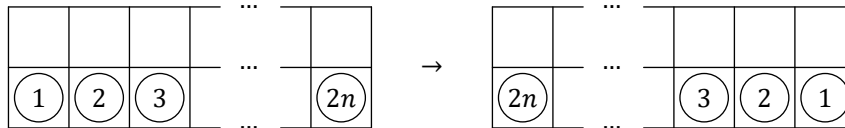
(Ahol $[a]$ az a valós szám (alsó) egész részét jelöli, vagyis azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb, mint a . Pl. $[1,9] = 1$ és $[-1,1] = -2$.)

(Jaroslav Švrček)

2 Adott a hegyesszögű ABC háromszög. A BA -val és CA -val ellentétes félegyenesekre illeszkednek rendre azok a D és E pontok, amelyekre $|BD| = |AC|$ és $|CE| = |AB|$. Bizonyítsd be, hogy az ADE háromszög körülírt körének középpontja az ABC háromszög köré írt körvonalra illeszkedik.

(Patrik Bak)

3 Az adott pozitív egész n számra vegyük a téglalap alakú $2n \times 2$ -es játéktáblát s rajta az $1, 2, \dots, 2n$ számozással ellátott $2n$ darab zsetont a bal oldali ábrán látható módon elrendezve. Egy lépésben egy zsetont az oldalszomszédos mezőre helyezhetünk, feltéve ha az üres.¹ Legkevesebb hány lépés szükséges ahhoz, hogy a jobb oldali ábrán levő elrendezést kapjuk meg az eredeti elrendezésből?



(Josef Tkadlec)

4 Adottak a k és n páratlan természetes számok. Egy táblára felírtuk minden i és j természetes számra az $\frac{i}{j}$ törtet, ahol $1 \leq i \leq k$ és $1 \leq j \leq n$. Határozd meg azt a valós q számot, amelyre fennáll az, hogy ha a törtet elrendezzük a legkisebb értékűtől a legnagyobbig (az azonos értékűeket tetszőleges sorrendbe írhatjuk), akkor ezen a listán a középső tört értéke q .

(Martin Melicher)

5 Adott a különböző oldalú ABC háromszög. Az AB és AC oldalak tengelyei együtt az A csúcsnál fekvő belső szög tengelyével egy háromszöget határoznak meg. Bizonyítsd be, hogy ezen háromszög magasságpontja az A csúcs-hoz tartozó súlyvonalra illeszkedik!

(Josef Tkadlec)

6 Vegyük a következőképpen definiált $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatot:

- $a_0 = 3$.
- Ha n nemnegatív egész szám, akkor $a_{n+1} = a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n - 1$.

- a) Bizonyítsd be, hogy végtelenül sok olyan prímszám létezik, amely a sorozat legalább egy tagjának az osztója.
- b) Bizonyítsd be, hogy végtelenül sok olyan prímszám létezik, amely a sorozatnak egyetlen tagjának sem az osztója.

(Martin Melicher)

Termín odovzdania riešení: 29. 11. 2022

¹A játék kipróbálható a következő weboldalon: <https://skmo.sk/72a3>.