
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Zadania úloh domáceho kola kategórie B

1 Na tabuľu napíšeme desať navzájom rôznych kladných celých čísel. V každom kroku najskôr podčiarkneme každé číslo, ktoré nie je súčtom žiadnych dvoch rôznych čísel napísaných na tabuľi, a potom všetky podčiarknuté čísla zotrieme.

- Dokážte, že pre ľubovoľných desať napísaných čísel zostane po konečnom počte krokov tabuľka prázdna.
- Určte najväčší počet krokov, po ktorých vykonaní ešte nemusí zostať tabuľka prázdna. Uveďte príklad desiatich čísel, pre ktoré tento počet dosiahneme.

(Patrik Bak)

2 Označme M počet všetkých možných vyplnení tabuľky 3×3 navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9. Ďalej označme N počet takýchto vyplnení, kde sú navyše súčty všetkých čísel v každom riadku aj stĺpci nepárne čísla. Určte hodnotu $N : M$.

(Jaromír Šimša)

3 Určte všetky dvojice (a, b) reálnych čísel také, že každá z rovníc

$$\begin{aligned}a(x^2 + ax + b) + b(x^2 + bx + a) &= 0, \\a(x^2 + bx + a) + b(x^2 + ax + b) &= 0\end{aligned}$$

je kvadratická rovnica s dvojnásobným koreňom.

(Jaroslav Švrček)

4 V konvexnom päťuholníku $ABCDE$ platí $BC \parallel ED$, $AE \parallel CD$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle EAD|$ a $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ABD|$. Dokážte, že $|CD| = |ED|$.

(Patrik Bak)

- Pre každé prvočíslo p uveďte príklad kladných celých čísel a, b, c takých, že $ab = c^2$ a $a + b - 2c = p$.
- Dokážte, že ak a, b, c sú kladné celé čísla také, že $ab = c^2$, tak $a + b + 2c$ je zložené číslo.

(Josef Tkadlec)

6 Daný je trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole B . Označme I stred kružnice jemu vpísanej, M stred prepony AC a X priesečník priamky IM s priamkou BC . Dokážte, že ak ležia body B, I, M, C na jednej kružnici, tak trojuholník ABX je rovnoramenný.

(David Hruška)

Termín odovzdania riešení: **16. 1. 2023**
