MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh školského kola kategórie A

1 V obore nezáporných reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\lfloor 3x + 5y + 7z \rfloor = 7z,$$
$$\lfloor 3y + 5z + 7x \rfloor = 7x,$$
$$\lfloor 3z + 5x + 7y \rfloor = 7y.$$

(Tomáš Bárta)

Riešenie:

Prvá rovnica zadanej sústavy je splnená práve vtedy, keď sú splnené nasledujúce dve podmienky:

- Číslo $7z$ je celé.
- Platí $7z \le 3x + 5y + 7z < 7z + 1$, čiže $3x + 5y \in [0, 1)$.

Podobne druhá a tretia rovnica sú splnené práve vtedy, keď čísla $7x$ a $7y$ sú celé a platí $3y + 5z, 3z + 5x \in [0, 1)$.

Uvažujme teraz ľubovoľnú trojicu podľa zadania nezáporných čísel (x, y, z), ktorá je riešením úlohy. Z nerovností $z \ge 0$ a $3z+5x < 1$ vyplýva $5x < 1$, odkiaľ $7x < \frac{7}{5} < 2$. To znamená, že *nezáporné celé* číslo $7x$ sa rovná jednému z čísel 0 alebo 1, t. j. platí $x \in \left\{0, \frac{1}{7}\right\}$. Podobne aj $y, z \in \left\{0, \frac{1}{7}\right\}$.

V tejto chvíli máme už len 2^3 čiže 8 trojíc (x, y, z), ktoré sú adeptmi na riešenie úlohy, takže by sme ich mohli jednotlivo testovať. Tomu sa vyhneme, keď si všimneme, že ak by niektoré dve z čísel x, y, z boli rovné $\frac{1}{7}$, jeden z výrazov $3x + 5y, 3y + 5z, 3z + 5x$ by mal hodnotu $\frac{8}{7}$, ktorá je väčšia ako 1, a to je spor. Vieme teda, že *najviac jedno* z čísel x, y, z je rovné $\frac{1}{7}$ a ostatné sú rovné 0. Potom však každý z troch (nezáporných) výrazov $3x + 5y$, $3y + 5z$, $3z + 5x$ je rovný nanajvýš $\frac{5}{7}$, takže podmienky, ktoré sme uviedli v úvode riešenia ako ekvivalencie zadaných rovníc, sú splnené, a teda všetky také trojice sú riešeniami.

Úloha má práve 4 riešenia, a to $(0, 0, 0)$, $\left(\frac{1}{7}, 0, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{7}, 0\right)$, $\left(0, 0, \frac{1}{7}\right)$.

Pokyny:

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

- A0. Čísla $7x$, $7y$, $7z$ sú celé: 0 bodov.
- A1. Správna odpoveď (aj bez dôkazu a skúšky): 1 bod.
- B1. $3x + 5y, 3y + 5z, 3z + 5x < 1$: 1 bod za jednu alebo dve nerovnosti, 2 body za všetky tri nerovnosti.
- B2. $5x, 5y, 5z < 1$ (alebo vo forme $x, y, z < \frac{1}{5}$): 1 bod len za všetky tri nerovnosti.
- C1. Prevedenie úlohy na otestovanie určitého počtu opísaných trojíc (x, y, z): 4 body v prípade jednociferného počtu, 3 body v prípade dvojciferného počtu.
- C2. Úplné otestovanie všetkých trojíc z C1: 1 bod v prípade jednociferného počtu, 2 body v prípade dvojciferného počtu.

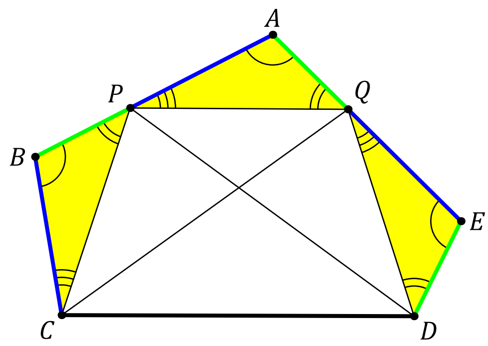
Celkovo potom udeľte súčet bodov za A1 o väčšieho zo súčtov bodov za B1 a B2 a bodov za C1 a C2.

2 V konvexnom päťuholníku $ABCDE$ platí $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle AED|$. Na stranách AB a AE existujú postupne body P a Q tak, že $|AP| = |BC| = |QE|$ a $|AQ| = |BP| = |DE|$. Dokážte, že $CD \parallel PQ$.

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Keďže podľa zadania $|BC| = |AP| = |EQ|$, $|BP| = |AQ| = |ED|$ a $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle PAQ| = |\sphericalangle QED|$, sú podľa vety *sus* trojuholníky PBC, QAP a DEQ navzájom zhodné.



Z toho vyplýva $|CP| = |PQ| = |QD|$ a tiež

$$|\sphericalangle CPQ| = 180° - |\sphericalangle BPC| - |\sphericalangle APQ| = 180° - |\sphericalangle PQA| - |\sphericalangle EQD| = |\sphericalangle PQD|.$$

To znamená, že podľa vety *sus* sú zhodné aj rovnoramenné trojuholníky CPQ a DQP. Z toho vyplýva aj zhodnosť ich výšok z vrcholov C a D na spoločnú protiľahlú stranu PQ, a teda $CD \parallel PQ$.

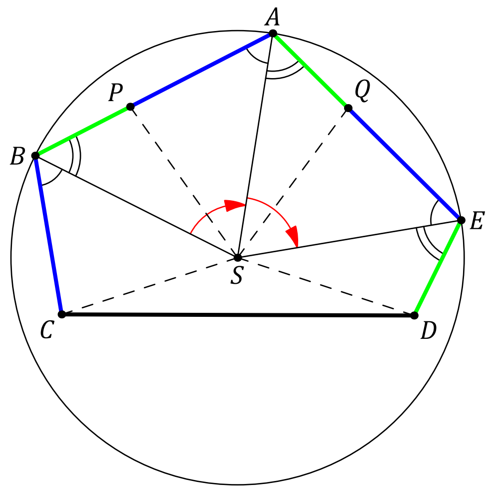
Poznámka:

Poznatok, že trojuholníky CPQ a DQP sú rovnoramenné a zhodné, je možné získať aj úvahou, že ide o dve (v obrázku nevyfarbené) zodpovedajúce si časti zhodných štvoruholníkov $QABC$ a $DEAP$. Zhodnosť týchto štvoruholníkov je dôsledkom toho, že podľa vety *sus* platia zhodnosti $\triangle QAB \cong \triangle DEA$ a $\triangle ABC \cong \triangle EAP$.

V nasledujúcom riešení upresníme, že zhodné zobrazenie štvoruholníka $QABC$ na štvoruholník $DEAP$ je určité otočenie. Vďaka tomu toto riešenie ukončíme inak (bez použitia výšok zhodných trojuholníkov).

Riešenie 2:

Označme S stred kružnice, ktorá prechádza vrcholmi B, A, E. V dôsledku zadania bodov P a Q platí $|BA| = |AE|$. Preto v otočení so stredom S o orientovaný uhol BSA platí $B \to A \to E$, a teda aj $P \to Q$



Ďalším dôsledkom vzťahov $B \to A \to E$ je zhodnosť štyroch uhlov SBA, SAB, SAE a SEA. Odtiaľ vyplýva, že osami zhodných uhlov CBA, BAE a AED sú postupne polpriamky BS, AS a ES. V našom otočení je tak obrazom orientovaného uhla CBS orientovaný uhol BAS, teda vzhľadom na $|BC| = |AP|$ platí $C \to P$. To isté platí o orientovaných uhloch SAE a SED, rovnosť $|AQ| = |ED|$ potom vedie ku $Q \to D$. Dokopy máme $C \to P \to Q \to D$, odkiaľ vyplýva, že úsečky CD a PQ majú spoločnú os – os úsečky CD totiž rozpoľuje uhol CSD, a teda rozpoľuje aj uhol PSQ, a preto je aj osou úsečky PQ. Vďaka spoločnej osi tak sú úsečky CD a PQ rovnobežné.

Pokyny:

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. V neúplných riešeniach oceňte čiastočné výsledky nasledovne:

A. Hypotéza o zhodnosti trojuholníkov CPQ a DQP (bez dôkazu): 0 bodov.
B1. Zhodnosť troch trojuholníkov DEQ, QAP a PBC alebo zhodnosť štvoruholníkov $CBAQ$ a $PAED$: 2 body.
B2. Zhodnosť trojuholníkov CPQ a DQP: 2 body, z toho 1 bod za rovnosti $|DQ| = |QP| = |PC|$ a 1 bod za rovnosť $|\sphericalangle DQP| = |\sphericalangle QPC|$.
C1. Existencia otočenia, v ktorom platí $B \to A \to E$ a $P \to Q$: 2 body.
C2. Vzťahy $C \to P$ a $Q \to D$: 3 body (2 body za iba jeden vzťah).

Celkovo potom dajte väčší zo súčtov bodov za B1 a B2 a bodov za C1 a C2.

3 Dokážte, že ak vyberieme ľubovoľné štyri delitele čísla 720, tak jeden z nich je deliteľom súčinu zvyšných troch.

(Jaromír Šimša)

Riešenie 1:

Vzhľadom na rozklad $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ má číslo 720 práve tri prvočinitele 2, 3 a 5, takže každý jeho deliteľ má tvar $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, kde a, b, c sú nezáporné celé čísla spĺňajúce nerovnosti $a \leq 4$, $b \leq 2$ a $c \leq 1$ (ktoré ďalej potrebovať nebudeme). Potom aj súčin ľubovoľných troch deliteľov čísla 720 má tvar $2^d \cdot 3^e \cdot 5^f$ s nezápornými celými číslami d, e a f. Číslo $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ je deliteľom čísla $2^d \cdot 3^e \cdot 5^f$ práve vtedy, keď $a \leq d$, $b \leq e$, $c \leq f$.

Tvrdenie úlohy dokážeme sporom. Pripusťme, že niektoré štyri delitele čísla 720 majú tú vlastnosť, že žiadny z nich nedelí súčin troch ostatných deliteľov. Potom každý z nich vo svojom rozklade musí mať niektoré z prvočísel 2, 3, 5 vo vyššej mocnine, než ju má vo svojom rozklade súčin ostatných troch deliteľov, a teda aj ktorýkoľvek z nich. Delitele však sú štyri a zastúpené prvočísla len tri, a to je zrejmý spor.

Riešenie 2:

Zvoľme teda ľubovoľné štyri delitele čísla 720. Najprv z nich vyberieme tri, ktoré obsahujú prvočíslo 2 v mocninách, ktoré neprevyšujú túto mocninu pri štvrtom deliteli (ak je možností takého výberu viac, zvolíme jednu z nich). Z týchto troch deliteľov potom vyberieme dva, ktoré obsahujú prvočíslo 3 v mocninách, ktoré neprevyšujú túto mocninu pri treťom deliteli. Z týchto dvoch deliteľov nakoniec vyberieme ten, ktorý obsahuje prvočíslo 5 v mocnine neprevyšujúcej túto mocninu pri druhom deliteli. V poslednom vybranom deliteľovi je potom každé p z $\{2, 3, 5\}$ zastúpené v mocnine, ktorá neprevyšuje aspoň jednu z mocnín p zastúpených v ostatných troch deliteľoch. To zaručuje, že posledný vybraný deliteľ má vlastnosť požadovanú zadaním úlohy.

Poznámka:

Opíšme jednu z možných obmien podaného výkladu. Z ľubovoľne zvolených štyroch deliteľov najprv preškrtneme ten, ktorý obsahuje prvočíslo 2 v najvyššej mocnine (ak je adeptov na preškrtnutie viac, preškrtneme len jeden – ktorýkoľvek z nich). (Tri nepreškrtnuté delitele sú vlastne trojicou z prvého výberu pôvodného postupu.) Preškrtnutý deliteľ môžeme ponechať „v hre" a zopakovať procedúru škrtania jedného deliteľa ešte dvakrát: raz pre prvočíslo 3 a druhýkrát pre prvočíslo 5. Niektoré zo štyroch deliteľov tak môžu byť preškrtnuté aj viackrát. keďže sme však škrtali iba trikrát, aspoň jeden deliteľ zostane nepreškrtnutý, má teda zrejme požadovanú vlastnosť.

Pokyny:

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. V neúplných riešeniach oceňte čiastočné závery nasledovne:

A1. Delitele čísla 720 sú v tvare $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ (stačí vymenovať prvočísla 2, 3, 5): 1 bod, prípadne 2 body, len keď sú uvedené všetky poznatky z úvodného odseku prvého riešenia a pritom za A2 nie je udelený žiadny bod.

A2. Úvahy o porovnaní počtov výskytov jednotlivých prvočísel 2, 3, 5 pre dané štyri delitele: 0 až 4 body podľa stupňa priblíženia k tvrdeniu úlohy.

Celkovo potom dajte súčet bodov za A1 a A2.

Slovenská komisia MO, ÚI PF UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice

Redakčná úprava: Peter Novotný, Stanislav Krajči

Vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže